

Sur les a Algèbres Préhilbertiennes Vérifiant $\|a^2\| \leq \|a\|^2$

A. Moutassim and A. Rochdi

Résumé. Soit A une algèbre réelle sans diviseurs de zéro. On suppose que l'espace vectoriel A est muni d'une norme $\|\cdot\|$ préhilbertienne vérifiant $\|a^2\| \leq \|a\|^2$ pour tout $a \in A$. Alors A est de dimension finie dans chacun des quatre cas suivants :

1. A est commutative contenant un élément non nul a tel que $\|ax\| = \|a\|\|x\|$ pour tout $x \in A$,
2. A est commutative algébrique et $\|a^2\| = \|a\|^2$ pour tout $a \in A$,
3. A est alternative contenant un élément unité e tel que $\|e\| = 1$,
4. A est alternative contenant un élément central non nul a tel que $\|ax\| = \|a\|\|x\|$ pour tout $x \in A$.

A est isomorphe à \mathbb{R}, \mathbb{C} ou \mathbb{C}^* dans les deux premiers cas et isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou \mathbb{O} dans les deux derniers cas.

Mots clés. Algèbre préhilbertienne, associative, alternative, commutative, quadratique.

Abstract. Let A be a real algebra without divisor of zero. Assuming that a vector space A is endowed with a pre-Hilbert norm $\|\cdot\|$ satisfying $\|a^2\| \leq \|a\|^2$ for all $a \in A$. Then A is finite dimensional in the four following cases :

1. A is a commutative containing a nonzero element a such that $\|ax\| = \|a\|\|x\|$ for all $x \in A$,
2. A is a commutative algebraic and $\|a^2\| = \|a\|^2$ for all $a \in A$,
3. A is an alternative containing a unit element e such that $\|e\| = 1$,
4. A is an alternative containing a nonzero central element a such that $\|ax\| = \|a\|\|x\|$ for all $x \in A$.

A is isomorphic to \mathbb{R}, \mathbb{C} or \mathbb{C}^* in the two first cases and isomorphic to $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ or \mathbb{O} in the two last cases.

Keywords. Pre-Hilbert algebra, associative, alternative, commutative, quadratic.

A. Moutassim and A. Rochdi
Laboratoire d'algèbre, d'Analyse et Applications (L3A)
Département de Mathématiques et Informatique,
Université Hassan 2, Faculté des Sciences Ben M'sik
B.P. 7955, CASABLANCA (Morocco)
e-mail: moutassim-1972@hotmail.com
abdellatifroc@hotmail.com

Received: September 10, 2007

Accepted: November 15, 2008