Adv. appl. Clifford alg. *Online First*

DOI 10.1007/s00006-003-0000

Advances in Applied Clifford Algebras

INVERSIONS

Gaston Casanova†

Abstract. We generalize metric properties of the circle to the quadrics by using the Clifford Algebra, and we study the inverse of an ellipse in R(3,0).

Keywords. Quadrics, inversion, Clifford algebra.

Part 1. Obituary: Gaston Casanova (1917-2009)

Gaston Casanova, Emeritus Editor of Advances in Applied Clifford Algebras. We received from J. P. Casanova the news that Gaston Casanova passed away the 22nd April, 2009. A short biographical note about our editor appeared in Adv. Appl. Clifford alg. 18 (2008). The article which follows is his posthumous, sent to us by his son Jean Pierre Casanova with the following note by Prof. Casanova himself:

"Cher Professeur Keller, Ceci est mon dernier article. Bien à vous, Gaston Casanova"

Prof. Pierre Anglès wrote a note for him in the name of all his colleagues, students and friends.

A la mémoire du Professeur Gaston Casanova, notre maître G. Casanova, mon ami Gaston.

Je voudrais dédier cette évocation de quelques souvenirs personnels à la mémoire du Professeur Casanova, à son épouse Madame Madeleine Casanova et à sa famille.

Ma première rencontre avec l'ouvre scientifique de G. Casanova s'inscrit dans mes souvenirs d'élève des classes de Mathématiques supérieures et spéciales au Lycée Pierre de Fermat de Toulouse. Le cours prestigieux de Mathématiques Spéciales rédigé par G. Casanova et publié en quatre volumes par les éditions E. Belin en 1963 forçait l'admiration de tous les préparationnaires, tout comme son élégant cours de Relativité Restreinte publié en 1961 par le même éditeur, par la clarté, la rigueur et le souci manifeste d'aller à l'essentiel.

Dans mon apprentissage des algèbres de Clifford comme pour plusiers personnes, un autre ouvrage écrit par Gaston Casanova, agrégé, docteur es sciences et publié en première édition aux Presses Universitaires de France en 1976, dans la collection: Que Sais-je?, s'imposait par son incontestable originalité: L'Algèbre Vectorielle. Dans son introduction, page 6, l'auteur affirmait que: d'une certaine façon, ce petit livre engage le lecteur sur des chemins nouveaux. Je reviendrai plus loin sur ce point.

Dans la première Conférence internationale sur les Algèbres de Clifford et leurs applications tenue à Canterbury U.K. 1985, j'eus le grand honneur de rencontrer le Pr. Gaston Casanova et son épouse. La forte personnalité de Gaston s'affirmait dans les rencontres avec d'illustres participants.

Dans cet cadre d'une université anglaise: sobre et solennel; la réception exquise et le niveau scientifique incomparable, la personnalité du Pr. Casanova s'affirmait dans les échanges fructueux entre les participants. Je voudrais signaler son grand sens de la convivialité, son humour en toute occasion. Ses réparties subtiles se faisaient jour à tout instant. Des liens d'amitié chaleureuse s'établirent immédiatement. A se souvenir les étonnantes promenades dans la belle campagne du Kent où, au volant de sa voiture, Gaston oubliait les règles de conduite propres à l'Angleterre.

Le temps passa. Cette fois dans le cadre de la septième Conférence sur les Algèbres de Clifford et leurs Applications, Toulouse. Le Professeur Casanova fit ainsi le 21 mai 2005 une conférence plénière intitulée: "Généralisations Cliffordiennes. Non localisation des électrons". Toute l'assistance applaudit vivement Gaston Casanova pour la haute tenue et la valeur de sa présentation. Un article dont le titre est: "Non localisation des électrons en mouvement" est publié dans les Actes de la Conférence. L'humour et l'intelligence de Gaston s'affirmaient à chaque instant. Madame Casanova et son fils Jean-Pierre l'entouraient de leurs soins affectueux.

Il y a un an, j'eus, à titre privé, le bonheur de savourer le plaisir d'une réception improvisée par Madame M. Casanova, son épouse à son domicile à Paris. Gaston et Madeleine Casanova occupaient un appartement proche de celui occupé par le Professeur André Lichnerowicz, son condisciple et de celui du Professeur Henri Cartan, avec qui il avait de fréquents entretiens. Gaston me montra des lettres de félicitations qui lui étaient adressées par des personnalités illustres: Elie Cartan lui-méme et Louis de Broglie. J'écoutai, sous le charme, s'égrainer des souvenirs mathématiques, politiques, philosophiques et littéraires. Gaston continuait à travailler avec une grande énergie!

Je reviens maintenant sur son livre: "L'algèbre Vectorielle". En voici le plan: XI chapitres, précédés d'une courte et précise introduction. L'auteur étudie successivement l'algèbre de Clifford les produits intérieurs et extérieurs; l'algèbre d'espace, (des matrices de Pauli); l'algèbre réelle d'espace temps, (l'algèbre des matrices de Dirac); l'électrodynamique et le photon, (équations de Lorentz, potentiels, force de Lorentz, photons); les transformations de Lorentz, (rotation de l'espace-temps, décomposition canonique des rotations, la transformation spéciale de Lorentz, le champ électromagnétique); les spineurs, (spineurs de Pauli, spineurs de Dirac); la théorie de Dirac, (équation de Dirac, grandeurs de champ, ondes planes, méthode de la base propre fixée, gradient des champs fins, tenseur de rotation); accélération; tenseur de tétrode; valeurs propres de l'énergie, interprétation du β; diffraction des électrons); l'atome d'hydrogène, (solutions planes, grandeurs de champ, moments cinétiques, états fondamentaux, solutions sphériques); la théorie relativiste du nucléon, (isovecteurs, champ pionique, charge du nucléon, doublet Ξ, moments magnétiques, masses); existence et classification des particules fondamentales, (triplets, doublets, singulets, isospin, différences de masse dans les multiplets). Les résultats du chapitre VIII on fait l'objet de trois notes aux Comptes rendus Acad. Sc. de Paris, 1968, t. 267, série B, p. 1551; 1975, t. 280, série A, p. 299; 1969, t. 268, série A, p. 437 et d'une publication: G. Casanova, Renversement du temps, Centro superiore di logica e Scienze Comparate, Bologne, Italie, 1972. Les résultats du chapitre IX sont associés aux notes suivantes aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, série A, p. 1202; 1970, t. 271, série A, p. 817; 1972, t. 275, série B, pp. 53, 121, 267, 399. Les résultats du chapitre X correspondent à une note au C. R. Acad. Sc. Paris, 1975, t. 280, série A, p. 1321. Les résultats du chapitre XI correspondent aux notes suivantes: C. R. Acad. Sc. Série A, t. 282, p. 349, 1976 et t. 282, p. 665, 1976.

Ce petit livre suivant le mot de Gaston est et demeurera en fait un grand livre écrit en français. Il convient de laisser le dernier mot au Professeur Gaston Casanova lui-même, (Introduction pages 5 et 6 de l'Algèbre Vectorielle), pour réfléchir sur l'importance de la structure d'Algèbre de Clifford et pour prendre conscience de la valeur de son œuvre:

"La signification géométrique de cette algèbre-(l'algèbre vectorielle)-conduit à de nombreuses applications, telles que rotations et inversion de la géométrie, électromagnétisme et équations de Lorentz et relativité restreinte et, encore, équation de Dirac que l'on écrira sous une forme très suggestive permettant une étude élégante de la théorie. Cependant l'algèbre vectorielle est mieux qu'une nouvelle écriture de résultats connus car, même en théorie de Dirac, elle facilite la découverte de propriétés qui n'avaient pas été formulées à l'aide de l'algèbre des matrices, mais elle va ensuite plus loin puisque seule elle permet d'écrire une équation relativiste du nucléon dont la fonction d'onde ne peut s'exprimer avec un spineur par suite de l'existence du champ pionique. Ainsi le lecteur pourra constater que la fonction d'onde des particules élémentaires ne nécessite pour exister utilement ni les matrices ni les espaces vectoriels hermitiens, mais seulement les produits de vecteurs dans l'espace-temps réel si bien qu'il n'est pas nécessaire de construire l'isospin dans un espace abstrait mais plus concrètement de le déduire du spin par rotations ou homothétie-rotations dans l'espace propre de la particule, ce qui met en relation la charge avec les composantes du champ pionique et ces résultats, qui ne sont possibles qu'en algèbre vectorielle, constituent du seul point de vue de la théorie de la connaissance un substantiel progrès".

Part 2. Inversions

1. General Presentation

In $R(p,q)$ an inversion is given by its center Ω and by its power K.

If the **Clifford algebra valued** $P(x)$ and $Q(y)$ are relative inverse:

$$(x-\omega)(y-\omega) = (y-\omega)(x-\omega) = K \tag{1}$$

In addition the square of the distance should be given by the absolute value of the fundamental form.

If $q = o$, the inversion is elliptic.

2. Theorem

Let $x^2 = k$ be a quadric and let Ω be an inversion center. It exists an inversion with power K which reproduces the quadric.

We write : $(y-\omega)(x-\omega) = K$

$$x = \omega + \frac{\mathrm{K}\ (y-\omega)}{(y-\omega)^2}$$

$$\left[\omega + \frac{\mathrm{K}(y-\omega)}{(y-\omega)^2}\right]^2 = \ \mathrm{k} \tag{2}$$

1) ω^2 **= k ,** the inversion center is on the quadric

We develop (2)

$$\omega^2 + \frac{K^2(y-\omega)^2}{(y-\omega)^4} + \frac{K\omega(y-\omega)+K(y-\omega)\omega}{(y-\omega)^2} = k \tag{3}$$

We simplify and divide by $K \neq 0$

$$\mathrm{K} + \omega\ (y - \omega) + (y - \omega)\ \omega = 0$$

This defines a plane.

2) K $= \omega^2 -$ **k** $\neq$ **0 ,** the inversion center is not on the quadric.

Then (3) becomes:

$$K + \frac{K^2}{(y-\omega)^2} + \ K\frac{\omega(y-\omega)+(y-\omega)\omega}{(y-\omega)^2} = 0$$

We develop and simplify

$y^2 - \omega^2 + K = 0$

$y^2 = \omega^2 - K = k$

which proves our proposition.

As a consequence, if T and T' are the contact points of tangents issued from a point M to the quadric, then $MT = MT'$.

3. Inverse of an Ellipse in $R(3,0)$

Let (E) $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ be an ellipse and let Oz be the perpendicular in O to the plane P of the ellipse.

Let $\Omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ be the inversion center.

Ω is on the quadric $a^2x^2 + b^2y^2 + kz^2 - 1 = 0$ if $a^2\omega_1^2 + \; b^2\omega_2^2 + \; k\omega_3^2 - 1 = 0$.

The solution for k will be positive if $a^2\omega_1^2 + \; b^2\omega_2^2 < 1$, i.e. if the projection of the inversion center Ω on the plane P is inside the ellipse (E).

This condition being satisfied, it exists an elliptic inversion so that the inverse of the quadric is a plane as the inverse of plane P is an ellipsoid; the inverse of the ellipse is an ellipse.

Gaston Casanova†

Received: March 16, 2009